



Penerapan Konsep *Minimal Length* pada Penyelesaian Persamaan Dirac Potensial *Extended Hulthen-Yukawa* Menggunakan *Asymptotic Iteration Method* (AIM)

Kristiyanto Adi Wibowo

Fisika FMIPA, Universitas Sebelas Maret, Indonesia

Penulis korespondensi: kristiyanto@student.uns.ac.id

Abstract. This study investigates the application of the minimal length concept to the Dirac equation with the extended Hulthen-Yukawa potential under the spin symmetry condition. The Dirac equation is modified by incorporating the minimal length correction and subsequently reduced to the Dirac equation with a Q -deformed central potential to facilitate analytical treatment. The resulting equation is solved using the Asymptotic Iteration Method (AIM) to obtain the relativistic energy eigenvalues and corresponding wave functions. Numerical calculations of the relativistic energy spectrum are then performed using Matlab based on the derived energy equation, while the wave functions are visualized to illustrate the characteristics of the obtained solutions. The results indicate that the relativistic energy spectrum depends on the quantum numbers and the potential parameters. Furthermore, the inclusion of the minimal length correction significantly affects the energy spectrum. An increase in the minimal length correction parameter leads to a corresponding increase in the relativistic energy values. These findings demonstrate that the minimal length effect plays an important role in modifying the solutions of the Dirac equation with the extended Hulthen-Yukawa potential and provides useful insight into the development of relativistic quantum mechanics incorporating quantum gravity effects at microscopic scales.

Keywords: Asymptotic Iteration Method (AIM); Dirac Equation; Extended Hulthen-Yukawa Potential; Relativistic Energy Spectrum; Spin Symmetry.

Abstrak. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji penerapan konsep panjang minimal pada persamaan Dirac dengan potensial extended Hulthen-Yukawa dalam kondisi spin simetri. Persamaan Dirac dimodifikasi dengan memasukkan koreksi panjang minimal, kemudian direduksi menjadi persamaan Dirac dengan potensial sentral Q -deformasi agar lebih mudah diselesaikan secara analitik. Penyelesaian dilakukan menggunakan metode Asymptotic Iteration Method (AIM) untuk memperoleh persamaan energi relativistik beserta fungsi gelombangnya. Selanjutnya, perhitungan numerik terhadap spektrum energi relativistik dilakukan menggunakan perangkat lunak Matlab berdasarkan persamaan energi yang telah diperoleh. Visualisasi fungsi gelombang juga dilakukan untuk menggambarkan karakteristik solusi pada berbagai nilai parameter. Hasil penelitian menunjukkan bahwa nilai energi relativistik dipengaruhi oleh bilangan kuantum serta parameter potensial yang digunakan. Selain itu, keberadaan koreksi panjang minimal memberikan kontribusi yang signifikan terhadap perubahan spektrum energi. Semakin besar nilai parameter koreksi panjang minimal yang diterapkan, semakin besar pula energi relativistik yang dihasilkan. Temuan ini menunjukkan bahwa efek panjang minimal memiliki peran penting dalam memodifikasi solusi persamaan Dirac pada potensial extended Hulthen-Yukawa, sehingga dapat menjadi acuan dalam pengembangan kajian mekanika kuantum relativistik yang mempertimbangkan pengaruh gravitasi kuantum pada skala mikroskopik.

Kata kunci: Asymptotic Iteration Method (AIM); Persamaan Dirac; Potensial Extended Hulthen-Yukawa; Spektrum Energi Relativistik; Spin Simetri.

1. PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu fisika mengalami perubahan yang sangat mendasar pada penghujung abad ke-19 hingga awal abad ke-20. Perubahan tersebut ditandai dengan lahirnya paradigma baru yang kemudian dikenal sebagai mekanika kuantum. Sebelum munculnya teori ini, hampir seluruh fenomena alam dijelaskan menggunakan konsep fisika klasik yang dikembangkan oleh Isaac Newton melalui hukum-hukum mekanikanya serta teori elektromagnetik yang diperkenalkan oleh James Clerk Maxwell (Putri Kholifatun Nisa et.al, 2024). Kedua teori

tersebut terbukti sangat berhasil dalam menjelaskan berbagai fenomena fisika pada skala makroskopik. Namun, seiring berkembangnya penelitian mengenai struktur atom dan perilaku partikel mikroskopik, ditemukan berbagai fenomena yang tidak dapat dijelaskan secara memadai oleh pendekatan fisika klasik. Kondisi tersebut mendorong lahirnya teori kuantum sebagai dasar baru dalam memahami sifat materi dan energi pada skala atomik maupun subatomik (Rakhmawati, 2024).

Mekanika kuantum kemudian berkembang menjadi salah satu cabang ilmu fisika yang memiliki karakteristik berbeda dibandingkan mekanika klasik. Berbeda dengan hukum Newton yang bersifat deterministik, mekanika kuantum mengedepankan konsep probabilitas dalam menjelaskan keadaan suatu partikel. Selain itu, mekanika kuantum juga memperkenalkan berbagai konsep baru, seperti fungsi gelombang, operator, superposisi, dan prinsip ketidakpastian (Puspitasari et al., 2024). Menurut (T.W. & Alamsyah, 2025), mekanika kuantum tidak memiliki satu pendekatan tunggal yang dapat dijadikan acuan umum dalam mempelajari seluruh prinsip dasarnya. Setiap fisikawan dapat mengembangkan pendekatan maupun formulasi yang berbeda dalam memahami konsep-konsep mekanika kuantum sesuai dengan kebutuhan permasalahan yang dikaji. Oleh karena itu, mekanika kuantum menjadi bidang yang terus berkembang dan memberikan ruang yang sangat luas bagi penelitian teoritis maupun aplikatif.

Perkembangan mekanika kuantum semakin pesat ketika konsep relativitas mulai dipadukan dengan teori kuantum. Upaya menggabungkan kedua teori tersebut bertujuan untuk menjelaskan perilaku partikel yang bergerak dengan kecepatan mendekati kecepatan cahaya. Salah satu pencapaian penting dalam bidang ini adalah diperkenalkannya Persamaan Dirac oleh Paul Dirac pada tahun 1928. Dirac berhasil mengembangkan persamaan gelombang relativistik yang bersifat kovarian sebagai penyempurnaan dari persamaan Schrödinger yang sebelumnya hanya berlaku untuk sistem nonrelativistic (Pebrian, 2026). Dalam formulasi tersebut, Dirac memperkenalkan matriks α dan β serta menggunakan bentuk energi relativistik orde pertama sehingga mampu menggambarkan perilaku partikel bermassa dengan spin 1/2 secara lebih lengkap. Keberhasilan formulasi ini tidak hanya memberikan dasar matematis yang lebih kuat bagi mekanika kuantum relativistik, tetapi juga berhasil memprediksi keberadaan antipartikel yang kemudian terbukti secara eksperimen (Rakhmawati, 2024).

Konsep tentang minimal length (panjang minimal) berhubungan dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg dan dipengaruhi oleh medan gravitasi. Dalam bidang mekanika kuantum telah banyak dilakukan penelitian terkait dengan konsep panjang minimal, seperti pada persamaan Schrödinger (Alemgadmi dkk., 2015), persamaan Klein-Gordon (Nugraha

dkk., 2017), persamaan Dirac, persamaan Bohr Mottelson (Alimohammadi & Hassanabadi, 2017), dengan menggunakan potensial yang berbeda. Persamaan Dirac memiliki peranan yang sangat penting dalam berbagai bidang penelitian fisika modern, khususnya fisika nuklir, fisika partikel, serta fisika energi tinggi. Persamaan ini digunakan untuk menjelaskan dinamika partikel yang dipengaruhi oleh gaya-gaya fundamental dengan mempertimbangkan efek relativistik. Dalam aplikasinya, salah satu permasalahan yang sering dikaji adalah pencarian solusi analitik maupun numerik dari Persamaan Dirac pada berbagai bentuk potensial. Solusi tersebut diperlukan untuk memperoleh informasi mengenai tingkat energi, fungsi gelombang, serta karakteristik sistem kuantum yang sedang dipelajari. Berbagai jenis potensial telah digunakan dalam penelitian, baik potensial sentral maupun potensial non-sentral, yang masing-masing memiliki karakteristik fisika berbeda (Prabandari, 2025).

Salah satu aspek yang menarik dalam penyelesaian Persamaan Dirac adalah adanya kombinasi antara potensial skalar ($S(r)$) dan potensial vektor ($V(r)$). Hubungan kedua potensial tersebut melahirkan konsep spin symmetry dan pseudospin symmetry yang memiliki peranan penting dalam menjelaskan struktur inti atom. Spin symmetry terjadi ketika potensial skalar memiliki nilai yang sama dengan potensial vektor, yaitu ($S(r)=V(r)$). Sebaliknya, pseudospin symmetry muncul ketika potensial skalar bernilai negatif terhadap potensial vektor atau ($S(r)=-V(r)$). Kedua konsep simetri tersebut telah banyak dimanfaatkan dalam kajian fisika nuklir karena mampu menjelaskan degenerasi tingkat energi pada berbagai sistem inti atom. Oleh sebab itu, analisis Persamaan Dirac pada kondisi spin symmetry maupun pseudospin symmetry terus menjadi topik penelitian yang relevan hingga saat ini (Ismatulloh et al., 2024).

Seiring berkembangnya penelitian dalam mekanika kuantum relativistik, berbagai metode matematis telah dikembangkan untuk memperoleh solusi Persamaan Dirac. Salah satu metode yang banyak digunakan adalah metode Nikiforov-Uvarov (NU). Metode ini memungkinkan penyelesaian persamaan diferensial orde dua secara sistematis sehingga banyak diterapkan dalam berbagai model potensial kuantum. Hassanabadi (2013), misalnya, berhasil menyelesaikan Persamaan Dirac dengan potensial osilator harmonik (Budaca, 2014) melalui pendekatan minimal length menggunakan metode Nikiforov-Uvarov. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa keberadaan parameter minimal length memberikan pengaruh terhadap spektrum energi sistem kuantum. Selain itu, Sameer (2014) juga menerapkan metode yang sama untuk memperoleh solusi keadaan terikat (bound state) pada Persamaan Dirac dengan massa yang bergantung pada posisi menggunakan potensial Eckart. Penelitian tersebut memperlihatkan bahwa metode Nikiforov-Uvarov merupakan salah satu pendekatan matematis yang efektif dalam menyelesaikan berbagai bentuk Persamaan Dirac (Hidayatulloh, 2025).

Penelitian lain juga dilakukan oleh Soylu (2008) yang menginvestigasi Persamaan Dirac menggunakan potensial Eckart pada kondisi spin symmetry maupun pseudospin symmetry. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa bentuk potensial yang digunakan sangat memengaruhi karakteristik solusi energi maupun fungsi gelombang yang dihasilkan. Berbagai penelitian tersebut menunjukkan bahwa eksplorasi terhadap bentuk potensial yang berbeda masih menjadi bidang kajian yang terus berkembang. Selain menghasilkan solusi matematis yang lebih akurat, penelitian mengenai berbagai jenis potensial juga memberikan kontribusi terhadap pemahaman fenomena fisika pada tingkat mikroskopik (Rakhmawati, 2024).

Salah satu konsep yang semakin banyak mendapat perhatian dalam mekanika kuantum modern adalah konsep minimal length. Konsep ini berkaitan erat dengan Generalized Uncertainty Principle (GUP) (Maggiore, 1993), yaitu pengembangan dari prinsip ketidakpastian Heisenberg (Bambi & Urban, 2008) yang mempertimbangkan adanya panjang minimum sebagai batas fundamental pengukuran ruang. Dalam kerangka ini diasumsikan bahwa terdapat skala panjang terkecil yang tidak dapat diukur lebih kecil lagi. Keberadaan minimal length diperkirakan muncul pada skala energi yang sangat tinggi, khususnya ketika efek gravitasi kuantum mulai memberikan kontribusi terhadap perilaku partikel. Parameter deformasi yang biasa dinyatakan dengan α' digunakan untuk menggambarkan pengaruh konsep tersebut. Ketika α' mendekati nol, sistem akan kembali pada mekanika kuantum konvensional. Sebaliknya, ketika α' mendekati satu, efek gravitasi kuantum menjadi dominan sehingga menghasilkan perilaku yang berbeda dibandingkan mekanika kuantum biasa. Dalam banyak penelitian teoritis, konstanta Planck tereduksi ($\hbar$) sering dinormalisasi menjadi satu untuk menyederhanakan proses perhitungan matematis (Ismatulloh et al., 2024).

Walaupun berbagai penelitian mengenai Persamaan Dirac telah banyak dilakukan, penerapan konsep minimal length pada berbagai bentuk potensial masih terus menjadi topik yang menarik untuk dikaji. Salah satu potensial yang banyak digunakan dalam fisika kuantum adalah potensial Hulthén. Potensial ini memiliki karakteristik yang menyerupai potensial Coulomb pada jarak pendek, namun mengalami penurunan secara eksponensial pada jarak yang lebih besar. Karakteristik tersebut menjadikan potensial Hulthén banyak dimanfaatkan dalam kajian fisika atom, fisika molekul, serta fisika nuklir. Selain memiliki makna fisik yang penting, potensial Hulthén juga memungkinkan diperolehnya solusi analitik pada kondisi tertentu sehingga sangat sesuai digunakan dalam pengembangan model teoritis.

Berdasarkan uraian tersebut, penelitian ini difokuskan pada penerapan konsep minimal length dalam penyelesaian Persamaan Dirac menggunakan potensial Hulthén pada kondisi spin symmetry. Kajian ini diharapkan mampu memberikan pemahaman yang lebih mendalam

mengenai pengaruh minimal length terhadap spektrum energi serta fungsi gelombang sistem kuantum relativistik. Selain memperkaya kajian teoritis dalam mekanika kuantum relativistik, hasil penelitian ini juga diharapkan dapat menjadi referensi bagi penelitian lanjutan yang berkaitan dengan pengembangan model kuantum berbasis Generalized Uncertainty Principle dan penerapannya dalam berbagai fenomena fisika modern.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Dirac, yang diperkenalkan oleh P.A.M. Dirac pada tahun 1928, merupakan persamaan gelombang relativistik yang digunakan untuk mendeskripsikan perilaku partikel bermassa dengan spin $\frac{1}{2}$, seperti elektron. Persamaan ini menggabungkan mekanika kuantum dan relativitas khusus sehingga mampu menjelaskan sifat partikel pada skala mikroskopik. Dalam formulasinya, interaksi partikel dipengaruhi oleh potensial skalar $S(r)$ dan potensial vektor $V(r)$. Kondisi spin simetri terjadi ketika $S(r) \approx V(r)$, sedangkan pseudospin simetri terjadi ketika $S(r) \approx -V(r)$. Melalui manipulasi matematis, persamaan Dirac dapat diturunkan menjadi persamaan diferensial yang lebih sederhana untuk kasus spin simetri.

Persamaan Dirac yang menggambarkan pergerakan partikel berspin-1/2 dengan massa M dalam kombinasi potensial yang meliputi potensial vektor yang saling tolak-menolak $V(r)$, dan sebuah potensial skalar yang saling tarik $S(r)$ diberikan pada persamaan [$\hbar = c = 1$] (Suparmi & Cari, 2014),

$$\left\{ \alpha \cdot \vec{p} + \beta (M + S(r)) \right\} \psi(r) = \{ E - V(r) \} \psi(r), \quad (2.1)$$

dimana E adalah energi relativistik dan $\vec{p}$ adalah operator momentum tiga dimensi, $-i\nabla$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \text{ dan } \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

dimana I adalah matrik identitas 2×2 dan $\vec{\sigma}$ adalah matrik pauli tiga dimensi

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Dalam sistem koordinat bola, persamaan Dirac diselesaikan menggunakan metode pemisahan variabel sehingga fungsi gelombang dipisahkan menjadi komponen radial, sudut polar, dan sudut azimuth. Pemisahan ini menghasilkan persamaan radial dan sudut yang dapat diselesaikan secara terpisah. Solusi pada bagian azimuth berbentuk fungsi periodik karena menggambarkan rotasi partikel terhadap sumbu-z, sedangkan fungsi radial menggambarkan distribusi probabilitas partikel terhadap jarak dari pusat.

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta. \quad (2.14)$$

Dengan devinisi ∇^2 untuk koordinat bola :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.15)$$

Sehingga persamaan Dirac pada Persamaan (2.13) dapat dituliskan :

$$\left[- \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right\} \right] \varphi_{(r)} + 2V_{(r)} (E + M) \varphi_{(r)} = (E^2 - M^2) \varphi_{(r)}. \quad (2.16)$$

Persamaan Dirac dalam sistem koordinat bola dapat diselesaikan dengan pemisaan fungsi gelombang tiga dimensi menjadi gelombang yang berdiri sendiri yaitu

$$\varphi_{(r)} = \varphi(r, \theta, \phi) = R_{(r)} P_{(\theta)} \Phi_{(\phi)}. \quad (2.17)$$

Dengan keterangan sebagai berikut : $R_{(r)}$ merupakan fungsi gelombang radial yang hanya bergantung pada fungsi r , $P_{(\theta)}$ merupakan fungsi gelombang sudut yang hanya bergantung pada fungsi θ dan $\Phi_{(\phi)}$ merupakan fungsi gelombang *azimuth* yang hanya bergantung pada fungsi ϕ . Persamaan Dirac dalam sistem koordinat bola dapat dituliskan

$$- \frac{P_{(\theta)} \Phi_{(\phi)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{(r)}}{\partial r} \right) - \frac{R_{(r)} \Phi_{(\phi)}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{(\theta)}}{\partial \theta} \right) - \frac{R_{(r)} P_{(\theta)}}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi_{(\phi)}}{\partial \phi^2} + 2V_{(r)} (E + M) R_{(r)} P_{(\theta)} \Phi_{(\phi)} = (E^2 - M^2) R_{(r)} P_{(\theta)} \Phi_{(\phi)}. \quad (2.18)$$

Kemudian Persamaan (2.18) dikalikan dengan $\frac{r^2}{R_{(r)} P_{(\theta)} \Phi_{(\phi)}}$, maka diperoleh :

$$\frac{1}{R_{(r)}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R_{(r)}}{\partial r} \right) + \left[(E^2 - M^2) - 2V_{(r)} (E + M) \right] r^2 = - \frac{1}{P_{(\theta)} r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial P_{(\theta)}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\Phi_{(\phi)} r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi_{(\phi)}}{\partial \phi^2}. \quad (2.19)$$

Penelitian ini menggunakan potensial Extended Hulthén–Yukawa, yaitu pengembangan dari potensial Hulthén yang banyak digunakan untuk memodelkan interaksi antara nukleon dan inti atom. Potensial Hulthén memiliki perilaku yang menyerupai potensial Coulomb pada jarak tertentu, tetapi memiliki jumlah keadaan terikat yang lebih sedikit. Penggabungan dengan

potensial Yukawa menghasilkan model potensial yang lebih fleksibel dalam menggambarkan interaksi partikel.

Potensial Hulthen telah digunakan luas untuk menggambarkan interaksi antara nukleon dan nukleus, dan diekspresikan dalam persamaan berikut :

$$V_H = -\frac{V_0 e^{-\delta r}}{1 - e^{-\delta r}}, \quad (2.30)$$

dimana V_0 dan δ adalah parameter nyata positif, dan mewakili kekuatan dan skrining berbagai potensial. Potensial Hulthen berperilaku seperti potensial Coulomb ketika r menjadi nol. Namun, jumlah nilai eigen *bound-state* dari potensial ini kurang dari potensial Coulomb (Aydogdu, Maghsoodi, & Hassanabadi, 2013). Peramaan potensial *Extended Hulthen-Yukawa* menjadi :

$$V = \frac{e^{2\gamma r}}{(e^{2\gamma r} - \tau)^2} = \frac{1}{(e^{\gamma r} - \tau e^{-\gamma r})^2} \quad (2.31)$$

Selain itu digunakan potensial hiperbolik q-deformasi, yaitu modifikasi fungsi hiperbolik dan trigonometri dengan memperkenalkan parameter deformasi q. Parameter ini memungkinkan transformasi antara bentuk potensial terdeformasi dan tidak terdeformasi melalui substitusi variabel tertentu, sehingga memperluas jenis sistem fisika yang dapat dianalisis.

Fungsi trigonometri dan Hiperbolik terdeformasi q yang menggunakan suatu parameter dalam potensial Rosen-Morse termodifikasi dan potensial Scarf trigonometrik tidak sentral didefinisikan oleh Arai. (1991) sebagai berikut (Pramono *et al.*, 2016) :

$$\sinh_q \alpha r = \frac{e^{\alpha r} - q e^{-\alpha r}}{2}, \quad (2.32.a)$$

$$\cosh_q \alpha r = \frac{e^{\alpha r} + q e^{-\alpha r}}{2}, \quad (2.32.b)$$

$$\tanh_q \alpha r = \frac{\sinh_q \alpha r}{\cosh_q \alpha r}, \quad (2.32.c)$$

$$\cosh_q^2 \alpha r - \sinh_q^2 \alpha r = q, \quad (2.32.d)$$

Deformasi dengan parameter q dalam fungsi hiperbolik dapat diperluas dalam fungsi trigonometrik. Definisi fungsi trigonometri dapat dijelaskan oleh cara yang sama dalam fungsi hiperbolik diusulkan oleh Suparmi *et al.* (2014) sebagai berikut :

$$\sin_q \alpha r = \frac{e^{i\alpha r} - qe^{-i\alpha r}}{2},$$

$$\cos_q \alpha r = \frac{e^{i\alpha r} + qe^{-i\alpha r}}{2},$$

$$\cos_q^2 \alpha r + \sin_q^2 \alpha r = q,$$

$$\tan_q \alpha r = \frac{\sin_q \alpha r}{\cos_q \alpha r},$$

$$\sec_q \alpha r = \frac{1}{\cos_q \alpha r},$$

$$\frac{d \sin_q \alpha r}{dr} = \alpha \cos_q \alpha r,$$

$$\frac{d \cos_q \alpha r}{dr} = -\alpha \sin_q \alpha r,$$

$$\frac{d \tan_q \alpha r}{dr} = q\alpha \sec_q^2 \alpha r,$$

Konsep penting lainnya adalah minimal length atau panjang minimum yang berasal dari teori gravitasi kuantum. Konsep ini muncul sebagai konsekuensi dari upaya menyatukan mekanika kuantum dan relativitas umum, yang memprediksi adanya batas minimum pengukuran panjang pada skala Planck. Keberadaan panjang minimum menyebabkan modifikasi terhadap prinsip ketidakpastian Heisenberg melalui Generalized Uncertainty Principle (GUP). Modifikasi tersebut mengubah hubungan komutasi antara posisi dan momentum sehingga operator momentum memperoleh koreksi yang bergantung pada parameter panjang minimum. Pada energi rendah, koreksi ini dapat diabaikan sehingga teori kembali pada mekanika kuantum biasa, sedangkan pada energi sangat tinggi efek panjang minimum menjadi signifikan.

Untuk memperoleh solusi persamaan Dirac digunakan Asymptotic Iteration Method (AIM), yaitu metode analitik yang mampu menentukan nilai eigen energi dan fungsi gelombang dari persamaan diferensial linear orde dua. Metode ini bekerja melalui proses iterasi terhadap koefisien persamaan hingga diperoleh kondisi terminasi yang menghasilkan nilai energi sistem. AIM banyak digunakan karena mampu memberikan solusi eksak maupun hampiran dengan tingkat ketelitian yang tinggi.

Sebagai pembandingan, digunakan pula metode hipergeometri (Nurhidayati dkk., 2017), yaitu metode penyelesaian persamaan diferensial orde dua melalui transformasi ke bentuk fungsi hipergeometri. Solusi fungsi gelombang dinyatakan dalam bentuk deret hipergeometri,

sedangkan nilai eigen energi diperoleh dari syarat agar deret tersebut berhenti pada orde tertentu sehingga menghasilkan solusi yang terbatas dan memenuhi syarat fisik.

Secara keseluruhan, kajian ini membahas formulasi persamaan Dirac pada koordinat bola dengan pendekatan spin simetri, penerapan potensial Extended Hulthén–Yukawa dan hiperbolik q -deformasi, pengaruh konsep minimal length berdasarkan GUP, serta penyelesaian persamaan menggunakan metode AIM dan metode hipergeometri untuk memperoleh fungsi gelombang dan spektrum energi partikel.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian teoritis yang dilaksanakan di Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi, Jurusan Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret Surakarta. Pelaksanaan penelitian dimulai pada September 2018 dengan memanfaatkan perangkat lunak MATLAB R2015 sebagai alat bantu komputasi dan visualisasi hasil. Objek penelitian berupa Persamaan Dirac yang dikaji dengan menerapkan konsep minimal length pada potensial Hulthén dalam kondisi spin symmetry. Tahap awal penelitian dilakukan melalui studi literatur untuk mengkaji teori-teori yang berkaitan dengan mekanika kuantum relativistik, konsep minimal length berdasarkan Generalized Uncertainty Principle (GUP), karakteristik potensial Hulthén, serta metode Asymptotic Iteration Method (AIM) sebagai pendekatan matematis dalam memperoleh solusi analitik Persamaan Dirac.

Tahap selanjutnya meliputi penyusunan Persamaan Dirac yang telah dimodifikasi dengan konsep minimal length, kemudian dilakukan substitusi potensial Hulthén dan pemisahan persamaan menjadi komponen radial serta sudut menggunakan koordinat bola. Masing-masing persamaan kemudian direduksi menjadi persamaan diferensial orde dua yang selanjutnya diselesaikan menggunakan metode Asymptotic Iteration Method (AIM) untuk memperoleh nilai energi dan fungsi gelombang. Hasil penyelesaian divisualisasikan menggunakan MATLAB sehingga karakteristik spektrum energi dan fungsi gelombang dapat dianalisis secara teoritis, khususnya untuk mengkaji pengaruh potensial Hulthén terhadap sistem kuantum relativistik pada kondisi spin symmetry. Berdasarkan hasil analisis tersebut, kemudian disusun kesimpulan yang menggambarkan karakteristik solusi Persamaan Dirac serta pengaruh penerapan konsep minimal length terhadap tingkat energi dan fungsi gelombang yang diperoleh.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Persamaan Dirac dengan Konsep Minimal Length pada Potensial Extended Hulthén-Yukawa Menggunakan Asymptotic Iteration Method (AIM)

Penelitian ini bertujuan memperoleh solusi analitik Persamaan Dirac pada kondisi spin symmetry dengan menerapkan konsep minimal length pada potensial Extended Hulthén-Yukawa menggunakan Asymptotic Iteration Method (AIM). Konsep minimal length merupakan salah satu konsekuensi dari pengembangan teori gravitasi kuantum, khususnya Generalized Uncertainty Principle (GUP), yang menyatakan bahwa terdapat batas minimum panjang yang dapat diukur di alam semesta. Berbeda dengan prinsip ketidakpastian Heisenberg dalam mekanika kuantum konvensional, GUP memodifikasi hubungan komutasi antara operator posisi dan momentum sehingga menghasilkan koreksi terhadap berbagai persamaan dasar mekanika kuantum, termasuk Persamaan Dirac. Penerapan konsep tersebut memberikan pengaruh terhadap bentuk operator momentum yang selanjutnya memengaruhi persamaan energi maupun fungsi gelombang suatu partikel relativistik.

Tahap awal penyelesaian dilakukan dengan memasukkan operator momentum yang telah dimodifikasi oleh parameter minimal length ke dalam Persamaan Dirac bergantung waktu. Karena parameter panjang minimal memiliki nilai yang sangat kecil, beberapa suku berorde tinggi dapat diabaikan sehingga persamaan menjadi lebih sederhana tanpa menghilangkan karakteristik utama sistem. Penyederhanaan ini menghasilkan bentuk Persamaan Dirac baru yang masih mempertahankan efek koreksi akibat minimal length. Selanjutnya dilakukan transformasi fungsi gelombang sehingga suku yang mengandung operator Laplacian kuadrat dapat dieliminasi. Transformasi tersebut bertujuan mempermudah proses penyelesaian matematis tanpa mengubah makna fisik dari sistem yang dianalisis.

Setelah diperoleh bentuk Persamaan Dirac yang lebih sederhana, potensial Extended Hulthén-Yukawa disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut. Potensial ini dipilih karena mampu menggambarkan interaksi yang bersifat eksponensial pada jarak tertentu sekaligus mengakomodasi karakteristik potensial Hulthén dan Yukawa dalam satu model. Keunggulan potensial tersebut adalah kemampuannya merepresentasikan berbagai sistem fisika, khususnya pada kajian fisika atom dan fisika nuklir. Selanjutnya dilakukan pemisahan variabel dalam koordinat bola sehingga Persamaan Dirac terbagi menjadi bagian radial dan bagian sudut. Pemisahan variabel ini sangat penting karena memungkinkan penyelesaian persamaan diferensial yang semula berdimensi tiga menjadi beberapa persamaan satu dimensi yang lebih mudah dianalisis.

Persamaan radial yang diperoleh kemudian ditransformasikan menggunakan pendekatan fungsi hiperbolik deformasi sehingga bentuk potensial dan suku sentrifugal dapat dituliskan dalam bentuk yang lebih sederhana. Pendekatan tersebut dilakukan karena suku sentrifugal tidak memiliki solusi analitik secara langsung pada potensial Extended Hulthén–Yukawa. Melalui pendekatan tersebut, bentuk persamaan diferensial berhasil direduksi menjadi persamaan hipergeometri yang selanjutnya dapat diubah menjadi bentuk standar metode Asymptotic Iteration Method (AIM).

Pada tahap berikutnya dilakukan identifikasi parameter-parameter AIM, yaitu fungsi ($\lambda(z)$) dan ($s(z)$), yang menjadi dasar proses iterasi. Kedua parameter tersebut diperoleh melalui perbandingan antara persamaan diferensial hasil transformasi dengan bentuk umum persamaan AIM. Selanjutnya dilakukan proses iterasi secara bertahap hingga memenuhi syarat terminasi metode AIM. Kondisi terminasi tersebut menghasilkan hubungan kuantisasi yang digunakan untuk menentukan nilai eigen energi sistem. Dengan demikian, solusi energi tidak diperoleh melalui pendekatan numerik murni, melainkan berasal dari hubungan matematis yang dibangun berdasarkan karakteristik Persamaan Dirac yang telah dimodifikasi oleh konsep minimal length.

Selain menghasilkan persamaan energi, metode AIM juga digunakan untuk memperoleh fungsi gelombang radial. Fungsi gelombang diperoleh dari penyelesaian persamaan hipergeometri yang muncul setelah transformasi variabel dilakukan. Bentuk fungsi gelombang yang dihasilkan masih berupa fungsi gelombang tak ternormalisasi karena konstanta normalisasi tidak dihitung dalam penelitian ini. Walaupun demikian, bentuk fungsi tersebut telah mampu menjelaskan karakteristik probabilitas keberadaan partikel dalam medan potensial Extended Hulthén–Yukawa. Seluruh persamaan energi yang diperoleh kemudian dihitung secara numerik menggunakan perangkat lunak MATLAB sehingga diperoleh nilai energi untuk berbagai variasi parameter panjang minimal, bilangan kuantum radial, dan parameter potensial. Hasil perhitungan numerik tersebut selanjutnya menjadi dasar dalam menganalisis pengaruh parameter minimal length terhadap spektrum energi dan distribusi probabilitas partikel relativistik.

Analisis Energi dan Fungsi Gelombang pada Persamaan Dirac dengan Potensial Extended Hulthén–Yukawa

Berdasarkan persamaan energi yang diperoleh melalui metode Asymptotic Iteration Method (AIM), dilakukan perhitungan numerik menggunakan perangkat lunak MATLAB untuk mengetahui karakteristik spektrum energi pada berbagai variasi parameter. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa nilai energi relativistik dipengaruhi oleh beberapa faktor,

yaitu lebar potensial, bilangan kuantum radial, dan parameter minimal length. Ketiga parameter tersebut memberikan kontribusi yang berbeda terhadap perubahan tingkat energi partikel sehingga dapat digunakan untuk menjelaskan perilaku sistem kuantum relativistik pada medan potensial Extended Hulthén–Yukawa.

Hasil pada Tabel 4.1 menunjukkan bahwa perubahan lebar potensial memberikan pengaruh yang cukup signifikan terhadap nilai energi relativistik. Ketika nilai parameter lebar potensial semakin besar, energi partikel mengalami penurunan secara bertahap pada setiap tingkat bilangan kuantum radial. Fenomena ini menunjukkan bahwa bentuk potensial berperan penting dalam menentukan keadaan energi sistem. Potensial yang semakin lebar menyebabkan distribusi gaya tarik terhadap partikel berlangsung pada daerah yang lebih luas sehingga keadaan terikat (bound state) menjadi lebih dominan. Akibatnya, tingkat energi yang dimiliki partikel semakin rendah. Dengan kata lain, semakin besar nilai lebar potensial, semakin kecil energi relativistik yang dihasilkan. Hasil tersebut mengindikasikan bahwa karakteristik potensial memiliki hubungan langsung terhadap kestabilan keadaan kuantum suatu partikel.

Selain dipengaruhi oleh parameter potensial, hasil perhitungan juga memperlihatkan bahwa bilangan kuantum radial memiliki pengaruh yang sangat jelas terhadap spektrum energi. Berdasarkan Tabel 4.2, kenaikan nilai bilangan kuantum radial dari keadaan dasar menuju tingkat eksitasi yang lebih tinggi menyebabkan energi relativistik mengalami penurunan secara bertahap. Misalnya, pada keadaan dasar diperoleh energi yang lebih tinggi dibandingkan ketika bilangan kuantum radial meningkat hingga tingkat berikutnya. Penurunan tersebut berlangsung secara konsisten pada seluruh variasi parameter minimal length yang digunakan dalam penelitian. Kondisi ini menunjukkan bahwa perubahan tingkat kuantum radial berhubungan dengan perubahan keadaan energi partikel dalam sistem relativistik.

Secara fisika, penurunan energi akibat bertambahnya bilangan kuantum radial menunjukkan bahwa probabilitas keberadaan partikel semakin menjauh dari pusat potensial. Semakin tinggi tingkat kuantum yang ditempati, semakin besar pula jari-jari rata-rata distribusi partikel terhadap inti. Akibatnya, gaya tarik antara partikel dan pusat potensial menjadi semakin lemah sehingga energi ikat sistem mengalami penurunan. Fenomena ini sejalan dengan konsep mekanika kuantum yang menyatakan bahwa tingkat energi berkaitan erat dengan distribusi spasial fungsi gelombang. Oleh karena itu, kenaikan bilangan kuantum radial tidak hanya mengubah besarnya energi, tetapi juga memengaruhi karakteristik penyebaran probabilitas partikel.

Hasil penelitian juga menunjukkan bahwa parameter minimal length memberikan pengaruh yang berbeda dibandingkan parameter lainnya. Nilai parameter ini merupakan bentuk

koreksi yang berasal dari teori Generalized Uncertainty Principle (GUP). Berdasarkan hasil simulasi numerik, semakin besar nilai parameter minimal length, semakin tinggi pula energi relativistik yang diperoleh pada setiap keadaan kuantum. Hal tersebut menunjukkan bahwa efek koreksi akibat gravitasi kuantum memberikan tambahan kontribusi terhadap energi sistem. Dengan adanya parameter minimal length, spektrum energi bergeser ke nilai yang lebih tinggi dibandingkan mekanika kuantum konvensional. Hasil ini menguatkan dugaan bahwa keberadaan panjang minimum mampu memodifikasi karakteristik sistem kuantum, terutama pada kondisi energi tinggi yang mendekati skala Planck.

Visualisasi fungsi gelombang yang diperoleh dari solusi Persamaan Dirac juga memberikan informasi penting mengenai distribusi probabilitas partikel. Fungsi gelombang hasil penelitian masih berupa fungsi gelombang tak ternormalisasi karena konstanta normalisasi tidak dihitung secara eksplisit. Walaupun demikian, bentuk fungsi gelombang tetap dapat digunakan untuk menggambarkan kecenderungan keberadaan partikel di sekitar pusat potensial. Kurva fungsi gelombang yang dihasilkan memperlihatkan adanya perubahan amplitudo untuk setiap variasi bilangan kuantum radial. Perubahan amplitudo tersebut menunjukkan bahwa distribusi probabilitas partikel tidak bersifat tetap, tetapi dipengaruhi oleh keadaan energi yang ditempati.

Berdasarkan Gambar 4.3 terlihat bahwa fungsi gelombang dengan bilangan kuantum radial yang lebih tinggi memiliki amplitudo yang lebih besar dibandingkan keadaan dasar. Hal ini menunjukkan bahwa peluang menemukan partikel pada daerah yang lebih jauh dari pusat potensial semakin meningkat seiring bertambahnya tingkat kuantum. Dengan demikian, distribusi probabilitas partikel menjadi lebih menyebar dan tidak lagi terpusat di sekitar inti. Karakteristik tersebut sesuai dengan interpretasi mekanika kuantum yang menyatakan bahwa kenaikan tingkat energi menyebabkan elektron atau partikel memiliki peluang lebih besar berada pada orbital yang lebih jauh dari pusat gaya.

Secara keseluruhan, hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan konsep minimal length berhasil memberikan koreksi terhadap solusi Persamaan Dirac pada potensial Extended Hulthén–Yukawa. Penggunaan metode AIM juga terbukti mampu menghasilkan solusi analitik yang sistematis, baik untuk persamaan energi maupun fungsi gelombang. Hubungan antara parameter minimal length, bilangan kuantum radial, dan lebar potensial menghasilkan karakteristik spektrum energi yang konsisten dengan teori mekanika kuantum relativistik. Oleh karena itu, penelitian ini tidak hanya memberikan solusi matematis terhadap Persamaan Dirac, tetapi juga memperlihatkan bahwa efek panjang minimum berpotensi menjadi salah satu faktor penting dalam menjelaskan perilaku partikel pada skala energi yang sangat tinggi. Temuan ini

diharapkan dapat menjadi dasar bagi penelitian lanjutan mengenai penerapan Generalized Uncertainty Principle pada berbagai model potensial lain dalam mekanika kuantum relativistik, sehingga dapat memperluas pemahaman mengenai hubungan antara teori kuantum dan gravitasi kuantum.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini berhasil menerapkan konsep minimal length pada Persamaan Dirac dengan potensial Extended Hulthén–Yukawa menggunakan Asymptotic Iteration Method (AIM) sebagai metode penyelesaian analitik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa parameter minimal length memberikan pengaruh yang nyata terhadap spektrum energi relativistik partikel. Peningkatan nilai parameter minimal length menyebabkan terjadinya kenaikan energi relativistik pada setiap bilangan kuantum radial. Temuan ini menunjukkan bahwa koreksi yang berasal dari konsep Generalized Uncertainty Principle (GUP) berkontribusi terhadap perubahan karakteristik energi sistem, sehingga semakin besar nilai parameter minimal length, semakin besar pula nilai energi relativistik yang dihasilkan.

Selain berhasil memperoleh persamaan energi, penelitian ini juga menghasilkan solusi fungsi gelombang melalui pendekatan pemisahan variabel dan transformasi matematis yang sesuai pada Persamaan Dirac dengan potensial Extended Hulthén–Yukawa. Penyelesaian menggunakan metode AIM memperlihatkan bahwa kenaikan bilangan kuantum radial diikuti dengan melemahnya energi ikat partikel terhadap inti, yang mengindikasikan semakin besarnya peluang partikel berada pada jarak yang lebih jauh dari pusat potensial. Fungsi gelombang yang diperoleh selanjutnya divisualisasikan menggunakan perangkat lunak MATLAB sehingga karakteristik distribusi probabilitas partikel dapat diamati secara lebih jelas. Dengan demikian, penelitian ini menunjukkan bahwa metode AIM merupakan pendekatan yang efektif dalam menyelesaikan Persamaan Dirac dengan penerapan konsep minimal length serta mampu memberikan gambaran mengenai pengaruh parameter tersebut terhadap energi dan fungsi gelombang sistem kuantum relativistik.

DAFTAR PUSTAKA

- Alemgadmi, K., Suparmi., Cari., Deta, U., *Approximation solution of Schrödinger equation for Q-deformed Rosen Morse using Supersymmetry Quantum mechanics (SUSY QM)*. 2015. AIP Conference Proceedings. 1677, 030004
- Budaca, R. *Harmonic oscillator potential with a sextic anharmonicity in the prolate collective geometrical model..* Physics Letters B. Vol. 739, 56-61, 2014
- C. Bambi, F. R. Urban, *Natural extension of the Generalised Uncertainty Principle*, Class.

- Quantum Grav. 25 (2008) 095006 [arXiv:0709.1965].
- D. A. Nugraha, A. Suparmi, C. Cari, and B.N. Pratiwi, "Asymptotic Iteration Method for analytical solution of Klein Gordon equation for Trigonometric Pöschl-Teller potential in D-dimensions," J. Phys. Conf. Ser., Vol. 1, hal. 42-48, 2017.
- Hidayatulloh, A. (2025). *Energi Spin Simetri Pada Potensial Rosen Morse Untuk Variasi K Dengan Menggunakan Metode Polynomial*. 1(1), 19–23.
- Ismatulloh, K., Yosi Nur Kholisho, & Baiq Desi Dwi Arianti. (2024). Solusi Persamaan Dirac Untuk Potensial Manning Rosen Hyperbolik Plus Potensial Tensor Tipe Coulomb Pada Pseudospin Simetri Menggunakan Polynomial Romanovski. *Kappa Journal*, 8(3), 485–494. <https://doi.org/10.29408/Kpj.V8i3.28217>
- M. Alimohammadi and H. Hassanabadi, "Alternative solution of the gamma-rigid Bohr Hamiltonian in minimal length formalism," Nuclear Physics A, , 439-449, 2017.
- M. Maggiore, *The algebraic structure of the generalized uncertainty principle*, Phys. Lett. B 319 (1993) 83 [arXiv:hep-th/9309034].
- Nurhidayati, I., Suparmi, A., Cari, C., *Analytical Solution of Schrödinger Equation in minimal length formalism for trigonometric potential using hypergeometry method*. 2017. Journal of Physics: Conference series vol. 997, 012016. [<https://doi.org/10.1088/1742-6596/997/1/012016>] .
- Pebrian, V. (2026). \ *Transformasi Pemikiran Einstein 1905-1921 Dalam Relativitas Dan Nobel Fisika*. 17(2), 77–88.
- Prabandari, S. (2025). *Tinjauan Filosofis The Ascent Of Man Dalam Perspektif Fisika Modern*. 6(2).
- Puspitasari, A., Mufida, F., & Setiaji, B. (2024). Analysis Of The Influence Of Analytical Mechanics Concept On The Development Of Modern Physics. *Jurnal Pendidikan Dan Ilmu Fisika*, 4(1), 60–88. <https://doi.org/10.52434/Jpif.V4i1.4004>
- Putri Kholifatun Nisa Et.Al. (2024). The Role Of Physics Learning In The Transformation Of. *Jurnal Fisika Dan Pembelajarannya (Phydagogic)*, 7(1), 63-68. <https://doi.org/10.31605/Phy.V7i1.3410>
- Rakhmawati, A. (2024). *Fisika Sebagai Pilar Ilmu Pengetahuan: Tantangan Dan Inovasi Masa Depan*. 106–110.
- T.W., A., & Alamsyah, N. (2025). Efektivitas Pendekatan Filsafat Sains Dalam Meningkatkan Pemahaman Konsep Hukum Newton Di Perguruan Tinggi. *Research And Development Journal Of Education*, 11(2), 1376. <https://doi.org/10.30998/Rdje.V11i2.27708>